

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ¹

Аннотация.

Актуальность и цели. Разработка аппаратных и программных методов восстановления входных сигналов нестационарных динамических систем и повышения их точности является актуальной проблемой, которая возникает во многих отраслях техники. Данная работа посвящена разработке аппаратных и программных методов восстановления входных сигналов нестационарных динамических систем, моделируемых дифференциальными и интегральными уравнениями. Предлагаемые в работе методы не зависят от физической природы измеряемой величины, что позволяет применять их во многих областях физики и техники и строить вычислительные алгоритмы восстановления входных сигналов измерительных преобразователей, выполненных на различных элементных базах.

Материалы и методы. Методы восстановления входных сигналов основаны на численных алгоритмах и результатах идентификации и параметрической идентификации. Предлагаемые методы позволяют осуществить коррекцию выходных сигналов динамических систем. Коррекция основана на построении обратного оператора к оператору, моделирующему измерительный преобразователь. Рассмотрена программная и аппаратная реализация обратного оператора.

Результаты. Разработанные методы восстановления входных сигналов осуществляют редукцию к идеальному прибору.

Выводы. Построены вычислительные алгоритмы, позволяющие восстанавливать с высокой точностью входные сигналы непрерывных динамических систем.

Ключевые слова: восстановление входных сигналов, редукция к идеальному прибору, идентификация динамических систем, импульсная переходная функция, вычислительные алгоритмы.

N. P. Krivulin

RECOVERING INPUT SIGNALS OF NON STATIONARY DYNAMICAL SYSTEMS

Abstract.

Background. The development of hardware and software methods for restoring input signals and increasing their accuracy is an actual problem that occurs in many branches of technology. This work is devoted to the development of methods for reconstructing input signals of non stationary dynamical systems. The methods proposed in the work do not depend on the physical nature of the measured value, which makes it possible to apply in many measurement areas and to build computa-

¹ Работа поддержана РФФИ. Грант 16-01-00594.

© 2018 Кривулин Н. П. Данная статья доступна по условиям всемирной лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>), которая дает разрешение на неограниченное использование, копирование на любые носители при условии указания авторства, источника и ссылки на лицензию Creative Commons, а также изменений, если таковые имеют место.

tional algorithms for restoring the input signals of measuring converters made on a different element base.

Materials and methods. Methods for restoring input signals are based on numerical algorithms and parametric identification. The proposed ones allow to correct the output signal of dynamic systems, consisting in the hardware or software implementation of the inverse operator to the operator simulating the measuring transducer.

Results. The methods of restoring input signals developed in this work allow us to construct algorithms that perform reduction to an ideal instrument.

Conclusions. The methods allow the correction of distortions by a computing device, which can be a specialized computing device made in the form of a microcontroller or a PC. Computational algorithms that allow to reconstruct the input signals of continuous systems with high accuracy are considered.

Key words: restoration of input signals, reduction to an ideal device, identification of dynamic systems, impulse response function, computational algorithms.

Введение

Проблема восстановления входных сигналов измерительных систем занимает одну из ключевых позиций во многих областях техники. Она возникает при динамических измерениях, в радиолокации, теории распознавания изображений, теории связи и т.д. Обзоры методов решения данной проблемы можно найти в работах [1–3].

Как отмечается в монографии [2], существует два подхода к решению данной проблемы. Первый, априорный, заключается в том, что путем совершенствования конструкции измерительных систем добиваются минимума искажений в системе приема сигнала; в основу второго, апостериорного, положены алгоритмы восстановления входного сигнала по выходному сигналу. Построение таких алгоритмов осуществляет редукцию к идеальному прибору.

В данной работе используется второй подход, основанный на алгоритмических методах идентификации динамических систем.

Задаче восстановления входных сигналов посвящено большое число работ (библиографию см. в [2, 4]), в которых в основном рассматриваются стационарные динамические системы, описываемые уравнениями вида

$$\int_0^{\infty} g(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t),$$

где $x(t)$ – входной сигнал, подлежащий восстановлению; $f(t)$ – известный выходной сигнал; $g(t)$ – известная импульсная переходная функция.

В данной работе рассматриваются методы восстановления входных сигналов нестационарных динамических систем, описываемых уравнениями вида

$$\int_0^{\infty} g(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t),$$

где $x(t)$ – входной сигнал, подлежащий восстановлению; $f(t)$ – известный выходной сигнал; $g(t,\tau)$ – импульсная переходная функция.

Предложено несколько подходов к восстановлению входных сигналов:

- 1) численный метод восстановления входного сигнала при известной импульсной переходной функции;
- 2) методы восстановления входного сигнала и динамических характеристик систем по результатам идентификации и параметрической идентификации.

Постановка задачи. Требуется восстановить исследуемые параметры входного сигнала в том виде, в котором они поступают на вход измерительной системы, т.е. скорректировать искажения, которые вносятся собственно измерительной системой.

1. Восстановление входных сигналов динамических систем по известным динамическим характеристикам

При известных динамических характеристиках систем одной из основных задач является восстановление входных сигналов. В данном разделе предложены методы восстановления входных сигналов по известной импульсной переходной функции.

В случае если *a-priori* импульсная переходная функция неизвестна, то она восстанавливается на основе методов, изложенных в работе [5].

Рассмотрим непрерывную динамическую систему, функционирование которой описывается уравнением

$$\int_0^{\infty} g(t, \tau) x(\tau) d\tau = f(t), \quad 0 \leq t < \infty, \quad (1)$$

где $g(t, \tau)$ – известная импульсная переходная функция; $x(t)$ – входной сигнал, подлежащий восстановлению; $f(t)$ – выходной сигнал.

Постановка задачи. Пусть $g(t, \tau)$ – известная импульсная переходная функция и известен выходной сигнал $f(t)$ системы (1). Требуется определить входной сигнал $x(t)$.

1.1. Численные методы восстановления входного сигнала

При решении прикладных задач вместо уравнения (1) приходится рассматривать уравнение вида

$$\int_0^T g(t, \tau) x(\tau) d\tau = f(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

где $n(t)$ – шум; T – момент времени такой, что при $t \geq T$ выполняется неравенство $|f(t) + n(t)| \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ – заданная погрешность.

Замечание. Предполагается, что уровень заданной погрешности не меньше уровня внешнего шума: $|n(t)| \leq \varepsilon$.

Обозначим через F множество всевозможных выходных сигналов исследуемого измерительного преобразователя (ИП), определенных на сегменте $[0, T]$. Обозначим через η множество случайных функций, характеризующих внешний шум.

Так как шум $n(t)$ носит случайный характер, то при реализации вычислительных алгоритмов его целесообразно отнести к вычислительной погрешности задания правой части уравнения (2).

Обозначим через $\{\varphi_i(t)\}$, $i=1,2,\dots$, множество линейно независимых функций, определенных и плотных в метрике $C_{[0,T]}$. Отметим, что это может быть множество ортогональных полиномов, семейство сплайнов и т.д. Выделим конечную систему функций $\{\varphi_i(t)\}$, $i=1,2,\dots,N$, такую, что любая функция $f \in F$ может быть аппроксимирована с точностью ε на сегменте $[0,T]$.

Рассмотрим следующую систему интегральных уравнений:

$$\int_0^T g(t,\tau)x(\tau)d\tau = \varphi_i(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad i=1,2,\dots,N, \quad (3)$$

состоящую из N интегральных уравнений Фредгольма первого рода.

Известно [6], что решение уравнений Фредгольма первого рода является некорректной задачей. Однако в данном случае известны точные значения ядра уравнения и правой части и классические численные методы могут дать решение с необходимой точностью. Для решения системы уравнений (3), $i=1,2,\dots,N$, можно использовать различные численные методы.

В частности, можно использовать метод механических квадратур.

Вначале преобразуем систему уравнений (3):

1. Проведем замену переменных: $\hat{t} = -1 + \frac{2}{T}t$, тогда $-1 \leq \hat{t} \leq 1$;

$\hat{\tau} = -1 + \frac{2}{T}\tau$, тогда $-1 \leq \hat{\tau} \leq 1$.

2. Введем функции: $\hat{g}(\hat{t}, \hat{\tau}) = \sqrt{1-\hat{t}^2} g\left(\frac{T}{2}(\hat{t}+1), \frac{T}{2}(\hat{\tau}+1)\right)$,

$$\hat{x}(\hat{t}) = \begin{cases} 0 & \text{при } \hat{t} = \pm 1, \\ x\left(\frac{T}{2}(\hat{t}+1)\right) \frac{T}{\sqrt{1-\hat{t}^2}} & \text{при } \hat{t} \neq \pm 1, \end{cases}, \quad \hat{\varphi}_i(\hat{t}) = \varphi_i\left(\frac{T}{2}(\hat{t}+1)\right), \quad i=1,2,\dots,N.$$

Тогда система уравнений (3) примет вид

$$\int_{-1}^1 \hat{g}(\hat{t}, \hat{\tau}) \hat{x}(\hat{\tau}) d\hat{\tau} = \hat{\varphi}_i(\hat{t}), \quad -1 \leq \hat{t} \leq 1, \quad i=1,2,\dots,N. \quad (4)$$

Приближенное решение системы уравнений (4) будем искать в виде функции $\hat{x}_n(\hat{t}) = \sqrt{1-\hat{t}^2} U_n(\hat{t})$, где $U_n(\hat{t})$ – полином Чебышева второго рода степени n на сегменте $[-1,1]$.

Подставив функции $\hat{x}_n(\hat{t})$ в уравнение (4), приравняв левые и правые части полученного выражения в узлах $\hat{t}_k$, $k=1,2,\dots,n$, являющихся нулями полинома Чебышева первого рода на сегменте $[-1,1]$, и воспользовавшись квадратурными формулами Гаусса наивысшей алгебраической степени точности, получаем систему метода механических квадратур:

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \hat{g}(\hat{t}_l, v_k) U_n(v_k) = \hat{\phi}_l(\hat{t}_l), \quad l=1,2,\dots,N, \quad (5)$$

где $\{\hat{t}_k\}$, $\{v_k\}$, $k=1,2,\dots,N$ – узлы полиномов Чебышева второго и первого рода на сегменте $[-1,1]$; α_k , $k=1,2,\dots,N$, – коэффициенты квадратурной формулы Гаусса с весом $\sqrt{1-\hat{t}^2}$.

Таблицы узлов и коэффициентов квадратурной формулы Гаусса можно найти в [7].

В случае если система уравнений (5) оказывается неустойчивой, то необходимо применить метод регуляризации. Запишем систему уравнений (5) в форме

$$CY = Z, \quad (6)$$

где $C = \{c_{lk}\}$, $k, l=1,2,\dots,n$, $c_{lk} = \hat{g}(\hat{t}_l, v_k) U_n(v_k)$, $k, l=1,2,\dots,N$, $Y = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, $Z = \{\hat{\phi}_1(\hat{t}_1), \dots, \hat{\phi}_n(\hat{t}_n)\}$.

Будем искать решение уравнения (6) в виде $Y = C^* B$, где C^* – матрица, сопряженная с C , $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ – искомый вектор.

Регуляризацию системы уравнений (6) будем проводить следующим образом.

Найдем собственные значения $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ матрицы CC^* . Пусть $\lambda_1 = 0$, $\lambda_i > 0$, $i=2,3,\dots,n$. Пусть ψ_i – собственный вектор матрицы CC^* , отвечающий собственному значению λ_i , $i=1,2,\dots,n$.

Систему уравнений (6) разложим по собственным векторам ψ_i , $i=1,2,\dots,n$, и регуляризацию проведем сдвигом собственного значения λ_1 , заменяя λ_1 на $\lambda_1 + \beta_1$, где β_1 – достаточно малое положительное число.

Располагая решениями системы (4), решения системы (3) будут иметь вид

$$x(t) = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{T}t - 1\right)^2} \hat{x}\left(\frac{2}{T}t - 1\right).$$

Получив решения системы (3), вернемся к восстановлению входных сигналов ИП (2). Прежде всего проведем фильтрацию правой части уравнения (2) фильтром низких частот (настроенным таким образом, чтобы функции $\phi_j(t)$, $j=1,2,\dots,n$, не претерпели изменений). В результате получаем

функцию $\hat{f}(t) = f(t) + n(t)$. Затем функцию $\hat{f}(t)$ разлагаем в ряд по базисным функциям $\{\varphi(t)\}$, $j = 1, 2, \dots, n$:

$$\hat{f}(t) = \sum_{k=1}^n \gamma_k \varphi_k(t).$$

Зная решение $x_j(t)$ системы уравнений (3) для каждой функции $\varphi_j(t)$, находим входной сигнал

$$x^*(t) = \sum_{k=1}^n \gamma_k x_k(t).$$

Замечание. Предложенный метод позволяет:

- 1) избежать влияния шума при вычислениях;
- 2) создать обширную базу данных для ИП различной природы.

1.2. Восстановление входного сигнала по результатам параметрической идентификации

Во многих случаях для восстановления входного сигнала целесообразно представить модель в виде дифференциального уравнения. Это позволит дополнительно исследовать устойчивость и чувствительность модели. Аналогичный подход был реализован в работе [8] для дискретных систем, где математическая модель определялась в виде разностного уравнения с переменными коэффициентами.

Постановка задачи. Пусть известна импульсная переходная функция (ИПФ) $g(t, \tau)$ динамической системы, описываемой уравнением (1).

Требуется построить математическую модель динамической системы (1) в виде дифференциального уравнения с переменными коэффициентами $a_n(t)$, $a_{n-1}(t)$, ..., $a_0(t)$:

$$a_n(t) \frac{d^n f(t)}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0(t) f(t) = x(t). \quad (7)$$

Здесь $x(t)$ – входной сигнал, подлежащий восстановлению; $f(t)$ – выходной сигнал.

Отметим, что функция $f(t)$, определяемая выражением (1) как выходной сигнал, является решением дифференциального уравнения (7).

Восстановление входного сигнала будем проводить по формуле (7). Для этого нужно определить коэффициенты $a_n(t), a_{n-1}(t), \dots, a_0(t)$ дифференциального уравнения (7) и найти производные выходного сигнала $f(t)$:

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n}, \frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}}, \dots, \frac{df(t)}{dt}.$$

Следуя работе [9], восстановление коэффициентов $a_n(t)$, $a_{n-1}(t)$, ..., $a_0(t)$ дифференциального уравнения (7) будем проводить, используя ИПФ $g(t, \tau)$ динамической системы (1), которая предполагается известной.

Используя ИПФ $g(t, \tau)$ системы (1), определим виртуальные входные сигналы $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_{n+1}(t)$ такие, чтобы им в качестве выходных сигналов соответствовала система линейно независимых функций

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_{n+1}(t). \quad (8)$$

Условие линейной независимости системы функций (8) заключается в отличии от нуля вронскиана

$$W(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_{n+1}(t)) = \begin{vmatrix} \varphi_1^{(n)}(t) & \varphi_1^{(n-1)}(t) & \dots & \varphi_1'(t) & \varphi_1(t) \\ \varphi_2^{(n)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \dots & \varphi_2'(t) & \varphi_2(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n+1}^{(n)}(t) & \varphi_{n+1}^{(n-1)}(t) & \dots & \varphi_{n+1}'(t) & \varphi_{n+1}(t) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (9)$$

Определим искомые виртуальные входные сигналы $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_{n+1}(t)$ из решения интегральных уравнений

$$\int_0^t g(t, \tau) x_i(\tau) d\tau = \varphi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n+1. \quad (10)$$

Решая систему (10), находим для каждого выходного виртуального сигнала $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n+1$, системы (10) соответствующий виртуальный входной сигнал $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n+1$.

Подставляя $\varphi_i(t)$ и $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n+1$, в (7), приходим к системе уравнений относительно $a_0(t), a_1(t), \dots, a_n(t)$:

$$a_n(t) \varphi_i^{(n)}(t) + a_{n-1}(t) \varphi_i^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t) \varphi_i(t) = x_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n+1. \quad (11)$$

Так как определитель Вронского (9) системы линейных алгебраических уравнений (11) отличен от нуля, то решение системы (11) будет однозначным.

В частности, если в качестве линейно независимых функций (8) выступают функции $y_1(t) = 1(t)$, $y_2(t) = t$, ..., $y_{n+1}(t) = t^n$, то, как показано в работе [9], при $t > 0$ коэффициенты дифференциального уравнения (7) определяются формулами

$$\begin{cases} a_0(t) = x_1(t); \\ a_1(t) = x_2(t) - a_0(t)t; \\ \dots; \\ a_n(t) = \frac{1}{n!} (x_{n+1}(t) - n(n-1) \dots 2a_{n-1}(t)t - \dots - a_0(t)t^n). \end{cases}$$

Таким образом, располагая функцией $g(t, \tau)$, вычисляем коэффициенты уравнения (7).

Отметим, что для определения $a_n(t)$, $a_{n-1}(t)$, ..., $a_0(t)$ не требуется подавать входные сигналы и фиксировать отклик системы на эти воздействия. Достаточно знать ИПФ системы.

Располагая функциями $a_k(t)$, $k=0,1,\dots,n$, входной сигнал $x(t)$ восстанавливаем по формуле (7). Для этого необходимо вычислить производные от функции $f(t)$, что, как известно, является некорректной задачей.

Для вычисления производных, следуя работам [10, 11], в ряде случаев может оказаться полезной вычислительная схема:

$$f^{(r)}(t) = \frac{r!}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} f(\bar{t}_k) \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{d\tau}{(\tau - (t + ih))^{r+1}} - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{d\tau}{(\tau - (t - ih))^{r+1}} \right] + R_N(f), \quad (12)$$

$$\bar{t}_k = t_k + \frac{T}{2N}, \quad k=0,1,\dots,N-1,$$

которая использует все измеренные в узлах

$$t_k = Tk / N, \quad k=0,1,\dots,N,$$

значения $f(t)$.

Вычислительная схема (12) позволяет вычислять производные любого конечного порядка и имеет достаточно высокую точность и устойчивость. Параметром регуляризации в схеме (12) является h . Зависимость точности и устойчивости от параметра h исследована в [11], где предложены и другие численные методы вычисления производных, часть которых имеют большую точность, но меньшую устойчивость.

При практическом вычислении производных от функции $f(t)$, $t \in [0, T]$, может быть использован следующий достаточно устойчивый метод. Пропустив функцию $f(t)$ через фильтр низких частот, полученную функцию $\tilde{f}(t)$ интерполируем по узлам Чебышева первого рода, трансформированным с сегмента $[-1, 1]$ на сегмент $[0, T]$, и вычисляем производные от построенного полинома. В этом случае производные вычисляются аналитически.

Примеры, реализующие способ восстановления коэффициентов дифференциального уравнения с переменными коэффициентами, рассмотрены в работе [9].

2. Восстановление входного сигнала аппаратной коррекцией выходного сигнала

Метод восстановления входного сигнала по аппаратной коррекции основан на обработке выходного сигнала динамических систем корректирующим устройством (КУ), на выходе которого будет наблюдаться входной сигнал измерительной системы. Для обработки выходного сигнала предлагается использовать корректирующее устройство, реализация которого может быть выполнена как аппаратно, так и программно.

Как и в случае определения ИПФ дискретных динамической системы [8], восстановление входного сигнала по коррекции выходного основано на следующем утверждении.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_0^t h(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = y(t), \quad 0 \leq t < \infty. \quad (13)$$

Обозначим через $\Phi(p)$, $Y(p)$ преобразования Лапласа функций $\varphi(t)$ и $y(t)$ соответственно:

$$\Phi(p) = L[\varphi(t)] = \int_0^\infty \varphi(t) e^{-pt} dt, \quad Y(p) = L[y(t)] = \int_0^\infty y(t) e^{-pt} dt.$$

Пусть преобразование Лапласа функции $h(t, \tau)$ по переменной t удовлетворяет условию

$$H(p, \tau) = L[h(t, \tau)] = \int_0^\infty h(t, \tau) e^{-pt} dt = \hat{H}(p) e^{-\tau q(p)}, \quad (14)$$

где $q(p)$ и $\hat{H}(p)$ – аналитические функции в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq \sigma$ ($\sigma = \text{const}$).

Тогда преобразование Лапласа уравнения (13) будет иметь вид

$$\hat{H}(p) \Phi(q(p)) = Y(p). \quad (15)$$

Доказательство данного утверждения и примеры восстановления ИПФ приведены в работе [12].

Постановка задачи. Пусть функционирование первичного измерительного преобразователя (ПИП) описывается уравнением

$$\int_0^t g(t, \tau) x(\tau) d\tau = f(t), \quad 0 \leq t < \infty, \quad (16)$$

где $x(t)$ – входной сигнал ПИП, подлежащий восстановлению; $f(t)$ – выходной сигнал ПИП; $g(t, \tau)$ – ИПФ ПИП.

Требуется построить измерительную систему (ИС), состоящую из ПИП и КУ, причем функционирование последнего описывается уравнением

$$\int_0^t g_K(t, \tau) f(\tau) d\tau = x(t), \quad 0 \leq t < \infty, \quad (17)$$

где $f(t)$ – входной сигнал КУ (выходной сигнал ПИП (16)); $x(t)$ – выходной сигнал КУ (входной сигнал ПИП (16)); $g_K(t, \tau)$ – ИПФ КУ.

Структурная схема включения КУ в ИС приведена на рис. 1.

Представим два метода построения импульсной переходной функции КУ.

Первый основан на проведении серии тестовых испытаний при неизвестной импульсной переходной функции ПИП. При этом определяются как импульсная переходная функция КУ, так и импульсная переходная функция ПИП.

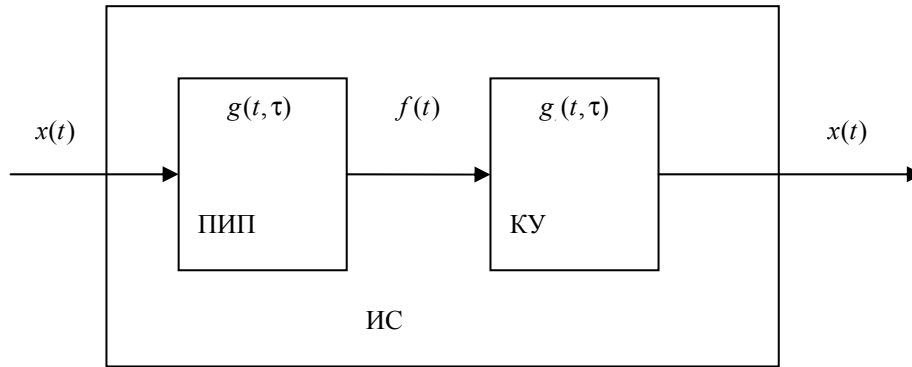


Рис. 1. Структурная схема ИС с аппаратной коррекцией: $x(t)$ – входной сигнал ИС ПИП; $x(t)$ – выходной сигнал КУ и ИС; $g(t, \tau)$ – ИПФ ПИП; $g(t, \tau)$ – ИПФ КУ

При втором методе восстановления импульсной переходной функции КУ предполагается, что известна импульсная переходная функция ПИП. При этом не требуется проведения дополнительных испытаний.

2.1. Восстановление импульсной переходной функции корректирующего устройства по серии тестовых испытаний

Данный метод позволяет определить одновременно: $g(t, \tau)$ – ИПФ ПИП и импульсную переходную функцию $g_K(t, \tau)$ КУ.

Восстановление функций $g(t, \tau)$, $g_K(t, \tau)$ будем проводить по серии из двух эталонных входных сигналов $x_i^\vartheta(t)$, $i=1,2$, и соответствующих выходных эталонных сигналов $f_i^\vartheta(t)$, $i=1,2$, наблюдаемых на ПИП (16).

Тогда для ИПФ $g(t, \tau)$ ПИП на основании (16) получим соотношения

$$\int_0^t g(t, \tau) x_i^\vartheta(\tau) d\tau = f_i^\vartheta(t), \quad i=1,2, \quad 0 \leq t < \infty. \quad (18)$$

Для ИПФ $g_K(t, \tau)$ КУ на основании (17) получим соотношения

$$\int_0^t g_K(t, \tau) f_i^\vartheta(\tau) d\tau = x_i^\vartheta(t), \quad i=1,2, \quad 0 \leq t < \infty. \quad (19)$$

Обозначим преобразования Лапласа входных сигналов $x_i^\vartheta(t)$, $i=1,2$, и выходных сигналов $f_i^\vartheta(t)$, $i=1,2$, в виде

$$X_i^\vartheta(p) = L[x_i^\vartheta(t)] = \int_0^\infty x_i^\vartheta(t) e^{-pt} dt; \quad F_i^\vartheta(p) = L[f_i^\vartheta(t)] = \int_0^\infty f_i^\vartheta(t) e^{-pt} dt, \quad i=1,2.$$

Пусть преобразования Лапласа ИПФ $g(t, \tau)$ – ПИП (16) и $g_K(t, \tau)$ – КУ (17) по переменной t удовлетворяют условию (14):

$$G(p, \tau) = L[g(t, \tau)] = \int_0^{\infty} g(t, \tau) e^{-pt} dt = G(p) e^{-\tau q(p)},$$

$$G_K(p, \tau) = L[g_K(t, \tau)] = \int_0^{\infty} g_K(t, \tau) e^{-pt} dt = G_K(p) e^{-\tau q_K(p)},$$

где $q(p), q_K(p)$ и $G(p), G_K(p)$ – подлежащие определению аналитические функции в полуплоскости $\text{Re } p \geq \sigma$ ($\sigma = \text{const}$).

Тогда преобразование Лапласа системы уравнений (18) для ПИП (16) на основании (13)–(15) примет вид

$$G(p) X_i^{\mathfrak{D}}(q(p)) = F_i^{\mathfrak{D}}(p), i = 1, 2, \quad (20)$$

где $q(p)$ и $G(p)$ – искомые аналитические функции в полуплоскости $\text{Re } p \geq \sigma$ ($\sigma = \text{const}$).

Аналогично преобразование Лапласа системы уравнений (19) для КУ (17) будет иметь вид

$$G_K(p) F_i^{\mathfrak{D}}(q_K(p)) = X_i^{\mathfrak{D}}(p), i = 1, 2, \quad (21)$$

где $q_K(p)$ и $G_K(p)$ – искомые аналитические функции в полуплоскости $\text{Re } p \geq \sigma$ ($\sigma = \text{const}$).

Решая систему уравнений (20) относительно функций $q(p)$ и $G(p)$, определим преобразование Лапласа ИПФ $g(t, \tau)$ ПИП в виде

$$G(p, \tau) = G(p) e^{-\tau q(p)}.$$

Значения ИПФ $g(t, \tau)$ найдем как обратное преобразование Лапласа по формуле обращения

$$g(t, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} e^{pt - \tau q(p)} G(p) dp.$$

Решая систему уравнений (21) относительно функций $q_K(p)$ и $G_K(p)$, определим изображение Лапласа ИПФ $g_K(t, \tau)$ КУ в виде

$$G_K(p, \tau) = G_K(p) e^{-\tau q_K(p)}.$$

Значения ИПФ $g_K(t, \tau)$ найдем как обратное преобразование Лапласа по формуле обращения

$$g_K(t, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} e^{pt - \tau q_K(p)} G_K(p) dp.$$

Тогда восстановление входного сигнала $x(t)$ в режиме работы ИП определяется по формуле (17) в виде

$$x(t) = \int_0^t g_K(t, \tau) f(\tau) d\tau.$$

Примеры восстановления импульсных переходных функций по серии тестовых испытаний рассмотрены в работах [1, 5, 12]

2.2. Определение ИПФ КУ по ИПФ ПИП

Рассмотрим ИС, состоящую из ПИП с ИПФ $g(t, \tau)$ и КУ, структурная схема которой приведена на рис. 1.

Требуется, располагая ИПФ $g(t, \tau)$ ПИП, определить ИПФ $g_K(t, \tau)$ КУ.

Пусть преобразование Лапласа ИПФ $g(t, \tau)$ ПИП по переменной t удовлетворяет условию (14):

$$G(p, \tau) = L[g(t, \tau)] = \int_0^\infty g(t, \tau) e^{-pt} dt = G(p) e^{-\tau q(p)}, \quad (22)$$

где $G(p)$, $q(p)$ – некоторые известные (или восстановленные описанным выше методом) аналитические функции в области.

Пусть ИПФ $g_K(t, \tau)$ КУ удовлетворяет условию (14):

$$G(p, \tau) = L[g_K(t, \tau)] = \int_0^\infty g_K(t, \tau) e^{-pt} dt = G_K(p) e^{-\tau q_K(p)}, \quad (23)$$

где $G_K(p)$, $q_K(p)$ – некоторые подлежащие определению аналитические функции в области $\operatorname{Re} p > \sigma$.

Обозначим преобразование Лапласа входного сигнала ПИП через $X(p)$, преобразование Лапласа выходного сигнала ПИП – через $F(p)$.

Запишем уравнения соответствия входных и выходных сигналов для ПИП и КУ аналогично уравнениям (18), (19):

$$\int_0^t g(t, \tau) x(\tau) d\tau = f(t), \quad \int_0^t g_K(t, \tau) f(\tau) d\tau = x(t). \quad (24)$$

Применяя преобразование Лапласа к уравнениям (24), при условиях (22), (23), на основании (13)–(15) получим систему нелинейных алгебраических уравнений относительно $G_K(p)$, $q_K(p)$:

$$G(p)X(q(p)) = F(p), \quad G_K(p)F(q_K(p)) = X(p).$$

Подставляя $F(p)$ из первого уравнения во второе, получим

$$G_K(p)G(q_K(p))X(q_K(p)) = X(p). \quad (25)$$

Среди решений уравнения (25) имеется следующее: $q(q_K(p)) = p$, $G_K(p)G(q_K(p)) = 1$.

Если функция $q(p)$ имеет обратную, то

$$q_K(p) = q^{-1}(p), \quad G_K(p) = \frac{1}{G(q^{-1}(p))} \text{ при } G(q^{-1}(p)) \neq 0.$$

ИПФ КУ определяется по формуле обращения:

$$g_K(t, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \frac{e^{pt - \tau q^{-1}(p)}}{G(q^{-1}(p))} dp.$$

Вычисляя функцию $g_K(t, \tau)$ по сетке узлов (t_k, τ_l) , $t_k = \frac{kB}{N}$, $k = 0, 1, \dots, N$, $\tau_l = \frac{lB}{N}$, $l = 0, 1, \dots, N$, где B – достаточно большое положительное число, методом теории аппроксимации можно построить функцию $\tilde{g}_K(t, \tau)$, аппроксимирующую с любой наперед заданной точностью ε ($\varepsilon > 0$) функцию $g_K(t, \tau)$.

Заключение

Предложенный в работе подход может быть распространен и на другие динамические системы: нелинейные системы, динамические системы с распределенными параметрами, эрмитарные системы. При этом можно получить обобщение ряда результатов работ [13, 14] для нелинейных систем, для динамических систем с распределенными параметрами [15, 16] и для эрмитарных систем [17, 18].

Библиографический список

1. **Бойков, И. В.** Аналитические и численные методы идентификации динамических систем : монография / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2016. – 398 с.
2. **Василенко, Г. И.** Теория восстановления сигналов / Г. И. Василенко. – М. : Сов. радио, 1979. – 272 с.
3. **Грановский, В. А.** Динамические измерения: теория и метрологическое обеспечение – вчера и сегодня / В. А. Грановский // Датчики и системы. – 2016. – № 3 (201). – С. 57-72.
4. **Сизиков, В. С.** Устойчивые методы обработки результатов измерений : учеб. пособие / В. С. Сизиков. – СПб. : Специальная литература, 1999. – 240 с.
5. **Бойков, И. В.** Определение динамических характеристик измерительных преобразователей с распределенными параметрами / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Измерительная техника. – 2000. – № 9. – С. 29.
6. **Тихонов, А. Н.** Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – 2-е изд. – М. : Наука ; Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 386 с.
7. **Кронрод, А. С.** Узлы и веса квадратурных формул. Шестнадцатизначные таблицы / А. С. Кронрод. – М. : Наука, 1964. – 144 с.
8. **Бойков, И. В.** Восстановление входных сигналов дискретных динамических систем / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Измерительная техника. – 2017. – № 11. – С. 3–7.
9. **Бойков, И. В.** Восстановление параметров линейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Измерительная техника. – 2013. – № 4. – С. 6–11.

10. **Бойков, И. В.** Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Ч. 2. Гиперсингулярные интегралы / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2009. – 252 с.
11. **Бойков, И. В.** Приближенные методы вычисления интегралов Адамара и решение гиперсингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков, Н. Ф. Добрынина, Л. Н. Домнин. – Пенза : Изд-во ПГТУ, 1996. – 188 с.
12. **Бойков, И. В.** Определение временных характеристик линейных систем с распределенными параметрами / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Метрология. – 2012. – № 8. – С. 3–14.
13. **Бойков, И. В.** Идентификация параметров нелинейных динамических систем / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2018. – Т. XXI, № 2 (74). – С. 17–31.
14. **Щербаков, М. А.** Итерационный метод оптимальной нелинейной фильтрации изображений / М. А. Щербаков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2011. – № 4 (20). – С. 43–56.
15. **Кривулин, Н. П.** Определение параметров физических процессов, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных с переменными коэффициентами / Н. П. Кривулин // Математическое и компьютерное моделирование естественнонаучных и социальных проблем : сб. ст. VIII Междунар. науч.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов / под ред. И. В. Бойкова. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2014. – С. 172–178.
16. **Бойков, И. В.** Параметрическая идентификация линейных динамических систем с распределенными параметрами / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Метрология. – 2014. – № 7. – С. 13–23.
17. **Бойков, И. В.** Параметрическая идентификация систем, математические модели которых описываются дифференциальными уравнениями с производными дробных порядков / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Метрология. – 2013. – № 9. – С. 3–16.
18. **Бойков, И. В.** Параметрическая идентификация эрмитарных систем с распределенными параметрами / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2013. – № 2 (26). – С. 120–129.

References

1. Boykov I. V., Krivulin N. P. *Analiticheskie i chislennyye metody identifikatsii dinamicheskikh sistem: monografiya* [Analytical and numerical methods of dynamic system identification: monograph]. Penza: Izd-vo PGU, 2016, 398 p.
2. Vasilenko G. I. *Teoriya vosstanovleniya signalov* [The theory of signal restoration]. Moscow: Sov. radio, 1979, 272 p.
3. Granovskiy V. A. *Datchiki i sistemy* [Sensors and systems]. 2016, no. 3 (201), pp. 57–72.
4. Sizikov V. S. *Ustoychivyye metody obrabotki rezul'tatov izmereniy: ucheb. posobie* [Stable methods of measurement results processing: tutorial]. Saint-Petersburg: Spetsial'naya literatura, 1999, 240 p.
5. Boykov I. V., Krivulin N. P. *Izmeritel'naya tekhnika* [Measurement technology]. 2000, no. 9, p. 29.
6. Tikhonov A. H., Arsenin V. Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods of incorrect problem solution]. 2nd ed. Moscow: Nauka; Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury, 1979, 386 p.
7. Kronrod A. S. *Uzly i vesa kvadraturnykh formul. Shestnadtsatiznachnye tablitsy* [Nodes and weights of quadrature formulas. Sixteen-digit tables]. Moscow: Nauka, 1964, 144 p.

8. Boykov I. V., Krivulin N. P. *Izmeritel'naya tekhnika* [Measurement technology]. 2017, no. 11, pp. 3–7.
9. Boykov I. V., Krivulin N. P. *Izmeritel'naya tekhnika* [Measurement technology]. 2013, no. 4, pp. 6–11.
10. Boykov I. V. *Priblizhennyye metody vychisleniya singulyarnykh i gipersingulyarnykh integralov. Ch. 2. Gipersingulyarnye integraly* [Approximate methods of computing singular and hypersingular integrals. Part 2. Hypersingular integrals]. Penza: Izd-vo PGU, 2009, 252 p.
11. Boykov I. V., Dobrynina H. F., Domnin L. H. *Priblizhennyye metody vychisleniya integralov Adamapa i peshenie gipepsingulyarnykh integral'nykh uravneniy* [Approximate methods of computing Hadamard integrals and solving hypersingular integral equations]. Penza: Izd-vo PGU, 1996, 188 p.
12. Boykov I. V., Krivulin N. P. *Metrologiya* [Metrology]. 2012, no. 8, pp. 3–14.
13. Boykov I. V., Krivulin N. P. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki* [Siberian journal of industrial mathematics]. 2018, vol. XXI, no. 2 (74), pp. 17–31.
14. Shcherbakov M. A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Tekhnicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Engineering sciences]. 2011, no. 4 (20), pp. 43–56.
15. Krivulin N. P. *Matematicheskoe i komp'yuternoe modelirovanie estestvennonauchnykh i sotsial'nykh problem: sb. st. VIII Mezhdunar. nauch.-tekhn. konf. molodykh spetsialistov, aspirantov i studentov* [Mathematical and computer modeling of natural scientific and social problems: proceedings of VIII International scientific and technical conference of young specialists, undergraduate and postgraduate students]. Penza: Izd-vo PGU, 2014, pp. 172–178.
16. Boykov I. V., Krivulin N. P. *Metrologiya* [Metrology]. 2014, no. 7, pp. 13–23.
17. Boykov I. V., Krivulin N. P. *Metrologiya* [Metrology]. 2013, no. 9, pp. 3–16.
18. Boykov I. V., Krivulin N. P. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Tekhnicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Engineering sciences]. 2013, no. 2 (26), pp. 120–129.

Кривулин Николай Петрович

кандидат технических наук, доцент,
кафедра высшей и прикладной
математики, Пензенский
государственный университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: krivulin@bk.ru

Krivulin Nikolay Petrovich

Candidate of engineering sciences,
associate professor, sub-department
of higher and applied mathematics,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

УДК 681.311

Кривулин, Н. П.

Восстановление входных сигналов нестационарных динамических систем / Н. П. Кривулин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2018. – № 3 (47). – С. 64–78. – DOI 10.21685/2072-3040-2018-3-6.